Označeni zapisi celih brojeva

Pozicioni brojevni zapisi u svom osnovnom obliku podrazumevaju da su brojevi koji se zapisuju nenegativni, pa zato ne sadrže informaciju o znaku broja. Zbog toga za takav zapis kažemo da je *neoznačen zapis*, jer ne omogućava čuvanje znaka broja. Ukoliko želimo da imamo mogućnost zapisivanja negativnih brojeva, tada sistem zapisivanja mora omogućavati da se sačuva informacija o znaku. Takve zapise zovemo *označenim zapisima*.

Primetimo da je označenost karakteristika zapisa, a ne samog broja: svaki broj ima znak (tj. svaki broj je ili nenegativan ili negativan), pitanje je samo da li mi imamo mogućnost da u konkretnom sistemu zapisivanja brojeva zapišemo informaciju o znaku. Ipak, često se u literaturi govori i o *„označenim brojevima"* i *„neoznačenim brojevima"*. Iako ovi termini nisu sasvim ispravni, oni su se prilično odomaćili u svakodnevnom govoru, tako da ćemo i mi često tako govoriti.

Uobičajen način označenog zapisivanja brojeva na papiru ili na tabli je da se ispred pozicionog zapisa broja (u bilo kojoj osnovi) dopiše simbol „+" ili „-" (na primer, $+543_{(10)}$, $-12_{(5)}$, $-10011011_{(2)}$). Međutim, u digitalnim računarima se sve zapisuje pomoću cifara, tako da je neophodno i informaciju o znaku na neki način kodirati pomoću cifara u odabranom zapisu. U narednim sekcijama razmatraćemo neke od načina označenog zapisivanja brojeva.

Podsetimo se da smo kod neoznačenih zapisa isti broj x u fiksiranoj osnovi B mogli zapisati pomoću različitog broja cifara. Na primer, dekadni broj 47 se može zapisati i kao 047 i kao 000047. Kada pišemo na papiru, mi obično koristimo minimalni broj cifara koji je neophodan da broj zapišemo. Međutim, kada se brojevi zapisuju u računaru, tada se obično koristi fiksirani broj cifara za zapis brojeva. Potpuno ista situacija je i kod označenih zapisa. Pored osnove B često ćemo fiksirati i broj cifara n koje koristimo za zapis brojeva. Ukoliko broj cifara n nije eksplicitno naglašen, tada ćemo podrazumevati da se govori o zapisu sa najmanjim mogućim brojem cifara. Drugim rečima, kada kažemo „zapis broja x u osnovi B", podrazumevamo da se radi o zapisu sa najmanjim mogućim brojem cifara, dok kada kažemo „zapis broja x u osnovi B sa n cifara", tada naglašavamo da zapis treba da ima n cifara.

Za dati ceo broj $x \geq 0$ sa $\langle x \rangle_{B,n}^{no}$ označavaćemo neoznačeni zapis broja x u osnovi B sa n cifara, pod pretpostavkom da je takav zapis moguć. Slično, sa $\langle x \rangle_{B}^{no}$ označavaćemo neoznačeni zapis broja x u osnovi B sa najmanjim mogućim brojem cifara. Obratno, ako je dat zapis $w = c_{n-1}c_{n-2}\ldots c_1c_0$ u osnovi B, ($c_i \in \{0, \ldots, B-1\}$), tada ćemo sa $[w]_{B}^{no}$ označavati broj koji taj zapis predstavlja, kada ga protumačimo kao neoznačen zapis u osnovi B. Ovakvom notacijom jasno razdvajamo brojeve i njihove zapise.

Znak i apsolutna vrednost

Najjednostavniji način da se zapiše znak broja je da se ispred zapisa apsolutne vrednosti (u odabranoj osnovi B) dopiše jedna vodeća cifra koja kodira znak. Znak „+" se zapisuje najmanjom cifrom u osnovi B (to je uvek cifra 0), dok se znak „-" zapisuje najvećom cifrom u osnovi B (to je cifra $B-1$). Ovakav zapis se zove *znak i apsolutna vrednost.*

Za dati ceo broj x, sa $\langle x\rangle_{B,n}^{zav}$ označavaćemo zapis broja x pomoću znaka i apsolutne vrednosti u osnovi B sa n cifara, ako je takav zapis moguć. Slično, sa $\langle x\rangle_{B}^{zav}$ označavaćemo zapis broja x pomoću znaka i apsolutne vrednosti u osnovi B sa najmanjim mogućim brojem cifara. Jasno je da važi $\langle x\rangle_{B,n}^{zav} = c_z\langle |x|\rangle_{B,n-1}^{no}$, gde je $c_z \in \{0, B-1\}$ cifra znaka. Slično, važi $\langle x\rangle_{B}^{zav} = c_z\langle |x|\rangle_{B}^{no}$. Odavde sledi da je najmanji broj cifara potreban za zapisivanje broja x pomoću znaka i apsolutne vrednosti za jedan veći od najmanjeg broja cifara potrebnog za zapisivanje apsolutne vrednosti broja x u neoznačenom zapisu. Primeri:

- U osnovi $B = 10$, za zapis pozitivnog znaka koristi se cifra 0, a za zapis negativnog znaka koristi se cifra 9. Na primer, broj $+87$ se sa 5 cifara zapisuje tako što se odredi neoznačeni zapis u osnovi 10 sa 4 cifre (to je 0087), a zatim se doda 0 kao cifra znaka: 00087. Sa druge strane, broj -87 se sa 5 cifara zapisuje kao 90087 (tj. samo se cifra znaka 9 doda ispred neoznačenog zapisa sa 4 cifara). Primetimo da je najkraći neoznačeni zapis broja 87 u osnovi 10 upravo 87, pa je zato zapis pomoću znaka i apsolutne vrednosti sa najmanjim brojem cifara u osnovi 10 trocifreni zapis 087 (dok je za -87 to zapis 987).

- U osnovi $B = 5$, za zapis pozitivnog znaka koristi se cifra 0, a za zapis negativnog znaka koristi se cifra 4. Na primer, broj $+35_{(10)}$ se sa 4 cifre zapisuje kao 0120 (jer je 120 odgovarajući trocifreni neoznačeni zapis), a broj $-35_{(10)}$ se sa 4 cifre zapisuje kao 4120 (dodamo cifru znaka 4 ispred trocifrenog neoznačenog zapisa). Ovo je ujedno i zapis sa najmanjim mogućim brojem cifara, jer je 120 najkraći neoznačeni zapis.

- U osnovi $B = 2$, za zapis pozitivnog znaka koristi se cifra 0, a za zapis negativnog znaka koristi se cifra 1. Na primer, broj $+25_{(10)}$ se sa 8 cifara zapisuje kao 00011001 (sedmocifreni neoznačeni zapis je 0011001 na koji dodajemo 0 kao cifru znaka), dok se broj $-25_{(10)}$ sa 8 cifara zapisuje kao 10011001 (cifra 1 se dopisuje kao cifra znaka ispred sedmocifrenog neoznačenog zapisa). Zapis broja $+25_{(10)}$ sa najmanjim mogućim brojem cifara je šestocifren, 011001, zato što je 11001 najkraći neoznačeni zapis tog broja.

- U osnovi $B = 16$, za zapis pozitivnog znaka koristi se cifra 0, a za zapis negativnog znaka koristi se cifra F. Na primer, broj $+35_{(10)}$ se sa 5 cifara zapisuje kao 00023 (jer je 0023 odgovarajući neoznačeni zapis sa 4 cifre), dok se broj $-35_{(10)}$ sa 5 cifara zapisuje kao $F0023$ (cifra znaka F se dopiše ispred neoznačenog zapisa sa 4 cifre). Zapis sa najmanjim brojem cifara je 023 (odnosno $F23$).

Iz gore navedenog sledi da je interval celih brojeva koji se mogu zapisati u osnovi B pomoću n cifara $I^{zav}_{B,n} = [-(B^{n-1} - 1), B^{n-1} - 1]$. Ovaj interval je, dakle, uvek simetričan u odnosu na nulu. Na primer, u dekadnom zapisu sa 3 cifre možemo zapisati brojeve iz intervala $[-99, +99]$, dok se u binarnom zapisu sa 8 cifara mogu zapisati brojevi iz intervala $[-127, +127]$. Primetimo da se broj 0 uvek može zapisati na dva načina (kao „+0" i kao „−0").

Proširivanje zapisa se postiže tako što se između vodeće cifre (cifre znaka) i sledeće cifre dopisuju nule. Na primer, ako u dekadnoj osnovi imamo zapis broja 047 (to je trocifreni zapis broja +47), tada ga možemo proširiti na petocifreni zapis dodavanjem dve nule između vodeće nule i cifre 4 (00047). Slično, za broj 947 (što je trocifreni zapis broja −47) odgovarajući petocifreni zapis bi bio 90047. Dakle, cifra znaka ostaje ista, a zapis apsolutne vrednosti se proširuje nulama.

Promena znaka se vrši jednostavno: samo se vodeća cifra koja kodira znak zameni cifrom koja kodira suprotan znak (tj. 0 se menja u $B - 1$, a $B - 1$ se menja u 0).

Sabiranje dva broja x i y zapisana u osnovi B sa n cifara pomoću znaka i apsolutne vrednosti se postiže tako što se najpre utvrde znakovi ovih brojeva (na osnovu vodeće cifre u zapisu). Ako su brojevi istog znaka, tada se njihove apsolutne vrednosti sabiraju, a znak zbira ostaje isti kao i znak sabiraka. Ako su različitih znakova, tada se manja apsolutna vrednost oduzima od veće, a znak zbira biće isti kao i znak onog sabirka koji ima veću apsolutnu vrednost. *Oduzimanje* se svodi na sabiranje uz promenu znaka umanjioca: $x - y = x + (-y)$. Ovo za posledicu ima da će se sada apsolutne vrednosti sabirati samo ako su brojevi x i y različitog znaka, dok će se oduzimati ako su istog znaka.

Do *prekoračenja* prilikom sabiranja i oduzimanja n-cifrenih brojeva može doći jedino ako je potrebno sabirati apsolutne vrednosti (to se dešava ili prilikom sabiranja brojeva istog znaka ili prilikom oduzimanja brojeva različitog znaka). Ukoliko prilikom sabiranja apsolutnih vrednosti (koje su zapisane $(n-1)$-cifrenim zapisima) dobijemo neoznačeno prekoračenje (tj. zbir ima n cifara), tada imamo prekoračenje i u označenom smislu.

Množenje i deljenje se obavlja tako što se pomnože (podele) apsolutne vrednosti, dok će znak rezultata biti pozitivan ako i samo ako su oba operanda bila istog znaka. Pritom, prilikom deljenja pored količnika imamo i celobrojni ostatak. Ovaj ostatak će, prema konvenciji, uvek biti istog znaka kao i deljenik. Ovo znači da će, u slučaju negativnog deljenika, nakon deljenja apsolutnih vrednosti dobijenom (nenegativnom) ostatku biti promenjen znak.

Postoje *tri glavna nedostatka* ovog načina zapisivanja brojeva:

- Zapisivanje znaka zahteva jednu dodatnu cifru. Kako je cifra znaka uvek 0 ili $B - 1$, ostale cifre brojevnog sistema u osnovi B se na toj cifarskoj poziciji ne koriste, što znači da se dodatna cifarska pozicija ne koristi dovoljno efikasno. Na primer, u dekadnom sistemu se sa 3 cifre mogu zapisati svega 199 brojeva, iako ima čak $10^3 = 1000$ kodnih reči dužine 3 nad azbukom $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Ovaj nedostatak ne postoji kod binarnog zapisa, jer u tom slučaju i onako imamo samo dve cifre, pa se dodatno cifarsko mesto efikasno koristi.

- Operacije sabiranja i oduzimanja se komplikovano implementiraju u računaru, jer zahtevaju grananje po slučajevima, na osnovu znakova operanada.

- Broj 0 se uvek može zapisati na dva načina (pri fiksiranoj dužini zapisa): npr. u binarnom sistemu, 0 se sa 8 bitova može zapisati kao 00000000 (tj. $+0$) ili kao 10000000 (tj. -0). Drugim rečima, preslikavanje $x \mapsto \langle x \rangle^{zav}_{B,n}$ nije jednoznačno.

Zapis brojeva u nepotpunom komplementu

Drugi način označenog zapisivanja celih brojeva je *zapis u nepotpunom komplementu*. Neka je data osnova B i zapis $w = c_{n-1}c_{n-2}\ldots c_1c_0$ dužine n u toj osnovi ($c_i \in \{0, 1, \ldots, B - 1\}$). Najpre definišemo *znak zapisa w u nepotpunom komplementu*:

- u slučaju da je osnova B parna, tada ako je cifra najveće težine u zapisu manja od $B/2$, za zapis w kažemo da je *nenegativan*; u suprotnom, ako je cifra najveće težine u zapisu w veća ili jednaka od $B/2$, tada za ovakav zapis kažemo da je *negativan*.

- u slučaju da je osnova B neparna, tada se znak zapisa w određuje na sledeći način: tražimo prvu cifru sa leva na desno koja je različita od $\lfloor B/2 \rfloor$. Ako je ta cifra manja od $\lfloor B/2 \rfloor$, tada je zapis *nenegativan*, a ako je veća od $\lfloor B/2 \rfloor$, zapis je *negativan*. Specijalno, ako su sve cifre jednake $\lfloor B/2 \rfloor$, tada je zapis w takođe *nenegativan*.

Od posebnog značaja je broj $K^{nk}_{B,n} = B^n - 1$ koji se naziva *komplementaciona konstanta*. *Operacija nepotpunog komplementa* nad zapisom w u osnovi B dužine n (u oznaci $nk(w)$) se definiše na sledeći način: $nk(w) = \langle K^{nk}_{B,n} - [w]^{no}_B \rangle^{no}_{B,n}$. Drugim rečima, $nk(w)$ je zapis iste dužine kao i w koji se dobija tako što se broj predstavljen (neoznačenim) zapisom w oduzme od komplementacione konstante. Primetimo da se komplementaciona konstanta uvek zapisuje nizom od n najvećih cifara u osnovi B (npr. u dekadnoj osnovi to je $99\ldots9$, u osnovi 5 to je $44\ldots4$, u osnovi 2 to je

$11\dots1$, a u osnovi 16 to je $FF\dots F$). Zbog toga se oduzimanje od ove konstante obavlja veoma jednostavno, komplementiranjem svake od cifara zapisa w do najveće cifre u osnovi B (tj. svaka cifra c se zamenjuje cifrom $B-1-c$). Na primer, u osnovi $B=10$, nepotpuni komplement zapisa 5712 biće 4287 (svaka cifra c se zameni sa $9-c$), dok će u osnovi $B=5$ nepotpuni komplement zapisa 2143 biti 2301 (svaka cifra se oduzme od 4). U osnovi $B=2$ određivanje nepotpunog komplementa zapisa je naročito jednostavno – samo treba svaki bit zameniti suprotnim bitom (npr. za zapis 10110101 odgovarajući nepotpuni komplement je 01001010).

Zapis celog broja x u nepotpunom komplementu u osnovi B sa n cifara (u oznaci $\langle x\rangle^{nk}_{B,n}$) definišemo na sledeći način:

- ako je broj $x \geq 0$, tada najpre odredimo neoznačeni zapis u osnovi B sa n cifara $\langle x\rangle^{no}_{B,n}$. Ako takav zapis ne postoji, ili postoji ali se ne smatra nenegativnim u smislu gornje definicije, tada ne postoji zapis $\langle x\rangle^{nk}_{B,n}$. Na primer, zapis broja 87 u nepotpunom komplementu u dekadnoj osnovi sa 5 cifara je 00087, jer je to odgovarajući neoznačeni zapis (a on se smatra nenegativnim u smislu gornje definicije). Sa druge strane, broj 87 se ne može zapisati sa 2 cifre u nepotpunom komplementu u osnovi 10, zato što njegov dvocifreni neoznačeni zapis 87 nije nenegativan, u smislu gornje definicije. Slično, broj $62_{(10)}$ se ne može zapisati u nepotpunom komplementu u osnovi 5 sa dve cifre, jer je njegov najkraći neoznačeni zapis 222 trocifren.

- ako je $x \leq 0$, tada najpre odredimo zapis apsolutne vrednosti $|x|$ u nepotpunom komplementu u osnovi B sa n cifara. Ako takav zapis postoji, tada je $\langle x\rangle^{nk}_{B,n} = nk(\langle |x|\rangle^{nk}_{B,n})$, pod uslovom da je dobijeni zapis negativan. U suprotnom, traženi zapis ne postoji. Drugim rečima, zapis broja x se dobija operacijom nepotpunog komplementa nad zapisom apsolutne vrednosti u nepotpunom komplementu sa istim brojem cifara (pod uslovom da takav zapis postoji i da se njegovim komplementiranjem dobija negativan zapis). Na primer, broj -87 se u nepotpunom komplementu u dekadnoj osnovi sa 5 cifara zapisuje tako što odredimo zapis broja 87 u nepotpunom komplementu sa 5 cifara (00087), a zatim izvršimo komplementiranje u odnosu na 99999 (dobijamo 99912). Međutim, dekadni zapis broja -87 sa 2 cifre u nepotpunom komplementu ne postoji, zato što ne postoji ni dvocifreni zapis broja 87 (zapis 87 nije nenegativan u smislu gornje definicije, pa bi njegovim komplementiranjem dobili 12, što nije negativan zapis). U binarnoj osnovi, broj $-5_{(10)}$ se u nepotpunom komplementu sa 8 cifara zapisuje tako što najpre odredimo zapis broja $5_{(10)}$ sa 8 cifara (to je 00000101), a zatim odredimo nepotpuni komplement (11111010). Primetimo da u slučaju neparne osnove B, ako se za broj $x < 0$ odgovarajuća apsolutna vrednost $|x|$ sa n cifara zapisuje kao $w = \lfloor B/2\rfloor\lfloor B/2\rfloor\dots\lfloor B/2\rfloor$, tada broj x nije moguće zapisati sa n cifara u nepotpunom komplementu u osnovi B, iako je to moguće za broj $|x|$. Na primer, broj $-62_{(10)}$ nije moguće napisati u nepotpunom komplementu pomoću tri cifre u osnovi 5, jer se broj $62_{(10)}$ sa tri cifre zapisuje kao 222 (iako je ovo regularan zapis broja $62_{(10)}$ u nepotpunom komplementu u osnovi 5, njegovim komplementiranjem dobili bi opet taj isti zapis 222, a kako on nije negativan, on ne može biti zapis broja $-62_{(10)}$).

Primetimo da se broj $x = 0$ pri fiksiranoj osnovi B i fiksiranom broju cifara n uvek može zapisati na dva načina: kao $00\ldots0$ i kao $\langle B-1\rangle\langle B-1\rangle\ldots\langle B-1\rangle$ (tj. pomoću zapisa koji se dobija komplementiranjem zapisa $00\ldots0$). Na primer, u dekadnoj osnovi sa 3 cifre, nula se može zapisati kao 000 i kao 999, dok se u binarnoj osnovi sa 8 cifara nula može zapisati kao 00000000 i kao 11111111.

Zapis celog broja x u nepotpunom komplementu u osnovi B sa najmanjim mogućim brojem cifara (u oznaci $\langle x\rangle_B^{nk}$) je jednak zapisu $\langle x\rangle_{B,n}^{nk}$ za najmanje n za koje takav zapis postoji.

Određivanje vrednosti predstavljene datim zapisom se obavlja na sledeći način. Neka je data osnova B i zapis $w = c_{n-1}c_{n-2}\ldots c_1c_0$ dužine n u toj osnovi ($c_i \in \{0, 1, \ldots, B-1\}$). Označimo sa $[w]_B^{nk}$ vrednost koja je predstavljena zapisom w u nepotpunom komplementu u osnovi B. Ukoliko je zapis w u nepotpunom komplementu nenegativan, tada se vrednost $[w]_B^{nk}$ izračunava na isti način kao u slučaju neoznačenog pozicionog zapisa (tj. $[w]_B^{nk} = [w]_B^{no}$). U slučaju negativnog zapisa je $[w]_B^{nk} = [w]_B^{no} - K_{B,n}^{nk}$, gde je n dužina zapisa w. Primeri:

- U osnovi $B = 10$ zapis 73 predstavlja negativan zapis (jer je $7 \geq 10/2$), pa je vrednost $[73]_{10}^{nk} = 73 - 99 = -26$. Zapis 5012 takođe predstavlja negativan zapis, pa je vrednost zapisanog broja $[5012]_{10}^{nk} = 5012 - 9999 = -4987$. Sa druge strane, zapis 1234 predstavlja nenegativan zapis (jer je $1 < 5$), pa je vrednost $[1234]_{10}^{nk} = 1234$.
- U osnovi $B = 2$ zapis 10010 predstavlja negativan zapis (jer počinje jedinicom), pa je vrednost $[10010]_2^{nk} = 10010 - 11111 = -01101_{(2)} = -13_{(10)}$. Zapis 0110 je nenegativan (jer počinje nulom), pa je vrednost $[0110]_2^{nk} = 0110_{(2)} = 6_{(10)}$.
- U osnovi $B = 16$ zapis 8712 predstavlja negativan zapis (jer je $8 \geq 16/2$), pa je vrednost $[8712]_{16}^{nk} = 8712 - FFFF = -78ED_{(16)} = -30957_{(10)}$. Sa druge strane, zapis $6FC$ je nenegativan (jer je $6 < 8$), pa je vrednost $[6FC]_{16}^{nk} = 6FC_{(16)} = 1788_{(10)}$.
- U osnovi $B = 5$ zapis 2421 predstavlja negativan zapis (prva cifra sa leva na desno koja nije jednaka $\lfloor 5/2 \rfloor = 2$ je 4 koja je veća od 2), pa je vrednost $[2421]_5^{nk} = 2421 - 4444 = -2023_{(5)} = -263_{(10)}$. Slično,

zapis 412 je negativan (jer je već prva cifra sa leva veća od 2), pa je vrednost $[412]_5^{nk} = 412 - 444 = -032_{(5)} = -32_{(5)} = -17_{(10)}$. Sa druge strane, zapis 142 je nenegativan (jer je već prva cifra manja od 2), pa je vrednost $[142]_5^{nk} = 142_{(5)} = 47_{(10)}$. Slično, broj 222 predstavlja nenegativan zapis (jer su sve cifre jednake 2), pa je vrednost $[222]_5^{nk} = 222_{(5)} = 62_{(10)}$.

Primetimo da je $[w]_B^{no} - K_{B,n}^{nk} = -(K_{B,n}^{nk} - [w]_B^{no}) = -nk(w)$. Otuda se vrednost negativnog zapisa u nepotpunom komplementu najlakše može odrediti tako što se izvrši komplementiranje zapisa i ispred doda znak „-".

Imajući u vidu gore navedeno, *interval celih brojeva* koji se mogu zapisati u osnovi B sa n cifara u nepotpunom komplementu je $I_{B,n}^{nk} = [-(B^n/2 - 1), (B^n/2 - 1)]$ u slučaju parne osnove, a $I_{B,n}^{nk} = [-(\lfloor B^n/2 \rfloor - 1), \lfloor B^n/2 \rfloor]$ u slučaju neparne osnove. Na primer, u dekadnom zapisu sa 3 cifre se mogu zapisati brojevi iz intervala $[-499, 499]$. U binarnom sistemu sa 8 cifara se mogu zapisati brojevi iz intervala $[-127, +127]$. U sistemu sa osnovom 5 sa 3 cifre moguće je zapisati brojeve iz intervala $[-221_{(5)}, +222_{(5)}]$, tj. $[-61_{(10)}, +62_{(10)}]$. Primetimo da u slučaju neparne osnove imamo interval asimetričan u odnosu na nulu, tj. postoji jedna pozitivna vrednost više koja se može predstaviti.

Proširivanje zapisa w broja x zapisanog u nepotpunom komplementu u osnovi B se vrši tako što se prvo utvrdi da li je zapis w nenegativan ili negativan. U prvom slučaju treba dopisati vodeće nule, dok u drugom slučaju treba dopisati odgovarajući broj vodećih cifara $B - 1$. Na primer, dekadni trocifreni zapis 345 se može proširiti na 5 cifara dodavanjem dve vodeće nule (00345), zato što je u pitanju nenegativan zapis. Sa druge strane, zapis 728 se proširuje na 99728. U osnovi $B = 16$, trocifreni zapis 921 se može proširiti na šestocifreni zapis $FFF921$, jer je u pitanju negativan zapis. U osnovi $B = 5$, trocifreni zapis 223 se može proširiti na petocifreni zapis 44223, jer je u pitanju negativan zapis. Specijalno, u binarnom zapisu proširivanje zapisa se svodi na dopisivanje bita znaka ispred zapisa (npr. 01101 se proširuje u 00001101, dok se 10110 proširuje u 11110110).

Promena znaka broja x koji je predstavljen zapisom w u nepotpunom komplementu u osnovi B dužine n se vrši tako što se obavlja operacija nepotpunog komplementiranja nad zapisom w (tj. važi $\langle -x \rangle_{B,n}^{nk} = nk(\langle x \rangle_{B,n}^{nk})$). Primetimo da iz ovoga sledi da ako su w i w' zapisi dva suprotna broja x i $-x$ u nepotpunom komplementu u osnovi B sa n cifara, tada važi $[w]_B^{no} + [w']_B^{no} = K_{B,n}^{nk}$. Dakle, sabiranjem zapisa w i w' kao neoznačenih brojeva u osnovi B dobijamo komplementacionu konstantu. Ova činjenica je i osnovna karakteristika zapisa u nepotpunom komplementu. Primeri:

- U osnovi $B = 10$: ako je broj x predstavljen zapisom 5981, tada je broj $-x$ predstavljen zapisom 4018 (svaka cifra c se zamenjuje cifrom $9 - c$).

- U osnovi $B = 2$: ako je broj x predstavljen zapisom 01101101, tada je broj $-x$ predstavljen zapisom 10010010 (svaka cifra c se zamenjuje cifrom $1 - c$).

- U osnovi $B = 16$: ako je broj x predstavljen zapisom $D5EF4$, tada je broj $-x$ predstavljen zapisom $2A10B$ (svaka cifra c se zamenjuje cifrom $F - c$, tj. $15_{(10)} - c$).

- U osnovi $B = 5$: ako je broj x predstavljen zapisom 1423, tada je broj $-x$ predstavljen zapisom 3021 (svaka cifra c se zamenjuje cifrom $4-c$). Primetimo da se komplementiranjem zapisa 222 dobija zapis 222, što ne izgleda kao ispravan rezultat (ispada da je broj x zapisan sa 222 jednak broju $-x$, jer se zapisuju isto; međutim, ovo nije tačno, jer zapis $222_{(5)}$ je jednak dekadnom broju 62, dok je suprotan broj -62). Ovo je zato što je u slučaju neparne osnove B interval $I^{nk}_{B,n}$ asimetričan — moguće je predstaviti jedan više pozitivan broj (npr. $I^{nk}_{5,3} = [-61_{(10)}, +62_{(10)}]$). Zato se najveći pozitivan broj ne može uspešno komplementirati u zapisu sa n cifara.

Sabiranje brojeva x i y čiji su zapisi u nepotpunom komplementu u osnovi B sa n cifara redom $\langle x\rangle^{nk}_{B,n} = w_x$ i $\langle y\rangle^{nk}_{B,n} = w_y$ vršimo tako što izračunamo $([w_x]^{no}_B + [w_y]^{no}_B)\ mod\ K^{nk}_{B,n}$. Izračunavanje ove vrednosti se obavlja na sledeći način: najpre se (neoznačeni) brojevi saberu na uobičajen način u osnovi B. Ukoliko dobijeni zbir ima n cifara, tada je to upravo zapis zbira $x + y$ u nepotpunom komplementu u osnovi B sa n cifara, pa je postupak završen. Ako zbir ima $n + 1$ cifru (pri čemu je ta dodatna cifra uvek jednaka 1), tada tu vodeću jedinicu treba obrisati sa početka zapisa i dodati je na cifru najmanje težine. Dobijeni rezultat predstavlja zapis zbira $x + y$ u nepotpunom komplementu (on uvek ima tačno n cifara). Primeri:

- U osnovi $B = 10$: sabiranjem $458 + 231 = 689$ dobijamo odgovarajući zbir. Kako je zbir trocifren, to je upravo konačan rezultat. Sa druge strane, sabiranjem $823 + 482 = 1305$ dobijamo rezultat sa jednom cifrom više. Ovu cifru brišemo iz zapisa i dodajemo je na poziciju najmanje težine: $305 + 001 = 306$, čime dobijamo konačan rezultat.

- U osnovi $B = 2$: sabiranjem $1001 + 0111 = 10000$ dobijamo zbir koji ima jednu cifru više. Ovu cifru uklanjamo iz zapisa i dodajemo je na poziciju najmanje težine: $0000 + 0001 = 0001$.

- U osnovi $B = 16$: sabiranjem $B43 + 621 = 1164$, pa je rezultat $164 + 001 = 165$.

- U osnovi $B = 5$: sabiranjem $2311 + 1141 = 4002$, što je i konačan rezultat, jer nema dodatne cifre.

Oduzimanje brojeva x i y čiji su zapisi u nepotpunom komplementu u osnovi B sa n cifara redom $\langle x\rangle_{B,n}^{nk} = w_x$ i $\langle y\rangle_{B,n}^{nk} = w_y$ vršimo tako što izračunamo $([w_x]_B^{no} - [w_y]_B^{no})\ mod\ K_{B,n}^{nk}$. Izračunavanje ove vrednosti se obavlja na sledeći način: najpre se (neoznačeni) brojevi oduzmu na uobičajen način u osnovi B. Ukoliko nema pozajmice na mestu cifre najveće težine, tada je to upravo zapis zbira $x-y$ u nepotpunom komplementu u osnovi B sa n cifara, pa je postupak završen. Ako pozajmica postoji (tj. $[w_x]_B^{no}$ je manji od $[w_y]_B^{no}$), tada cifru 1 treba oduzeti od cifre najmanje težine. Dobijeni rezultat predstavlja zapis razlike $x - y$ u nepotpunom komplementu (on uvek ima tačno n cifara). Primeri:

- U osnovi $B = 10$: oduzimanjem $237-491 = 746$ uz pozajmicu na mestu najveće težine. Oduzimanjem te jedinice dobijamo $746 - 001 = 745$.
- U osnovi $B = 2$: oduzimanjem $1010 - 1100 = 1110$ uz pozajmicu na mestu najveće težine. Oduzimanjem te jedinice dobijamo $1110 - 0001 = 1101$.
- U osnovi $B = 16$: oduzimanjem $3EF - 52D = EC2$ uz pozajmicu na mestu najveće težine. Oduzimanjem te jedinice dobijamo $EC2-001 = EC1$.
- U osnovi $B = 5$: oduzimanjem $3412 - 2101 = 1311$, bez pozajmice. Otuda je ovo i konačan rezultat.

Drugi način da se izvrši oduzimanje je da se ono svede na sabiranje sa suprotnom vrednošću. Na primer, umesto da oduzimamo 237 i 491 u osnovi 10, možemo sabrati $237 + 508 = 745$ (jer je 508 zapis broja -491 u nepotpunom komplementu). Slično, umesto oduzimanja $1010-1100$ u osnovi 2, možemo sabrati $1010 + 0011 = 1101$. Oduzimanje $3EF - 52D$ u osnovi 16 se može svesti na sabiranje $3EF + AD2 = EC1$. Najzad, oduzimanje $3412 - 2101$ u osnovi 5 se svodi na sabiranje $3412 + 2343 = 1310$ uz prenos na poslednjoj poziciji, što daje konačan rezultat $1310 + 1 = 1311$.

Prekoračenje prilikom sabiranja dva broja zapisana sa n cifara u osnovi B u nepotpunom komplementu se može dogoditi ukoliko prilikom sabiranja izađemo iz intervala $I_{B,n}^{nk}$. Ovo se manifestuje tako što je dobijeni rezultat nekonzistentnog znaka. Na primer, prilikom sabiranja dva pozitivna broja mora se dobiti pozitivan broj. Ukoliko, na osnovu znaka zapisa, izgleda da je dobijen negativan zbir, znači da imamo prekoračenje. Slično, prilikom sabiranja dva negativna broja ne može se dobiti pozitivan zbir. Ako se to dogodi, znači da imamo prekoračenje. Prilikom sabiranja brojeva različitog znaka ne može doći do prekoračenja. Na primer, sabiranjem brojeva 354 i 391 u dekadnoj osnovi dobijamo zbir 745. Kako su oba sabirka pozitivna, a dobijeni zbir predstavlja negativan zapis, znači da imamo prekoračenje. Slično, sabiranjem brojeva 931 i 512 u dekadnoj osnovi dobijamo zbir 444. Kako su sabirci negativni, a zbir pozitivan, znači da imamo prekoračenje.

Do prekoračenja prilikom oduzimanja može doći samo ako su umanjenik i umanjilac suprotnog znaka. Ukoliko smo oduzimanjem pozitivnog i negativnog broja dobili negativnu razliku, tada imamo prekoračenje. Slično, ako smo oduzimanjem negativnog i pozitivnog broja dobili pozitivnu razliku, tada imamo prekoračenje. Na primer, oduzimanjem brojeva 231 i 512 u osnovi 10 dobijamo razliku 718. Kako smo oduzimanjem pozitivnog i negativnog broja dobili negativnu razliku, jasno je da imamo prekoračenje. Primetimo da ako bismo oduzimanje vršili svođenjem na sabiranje sa suprotnim brojem, tada bismo koristili pravila za detekciju prekoračenja kod sabiranja. U prethodnom primeru, sabirali bismo 231 i 487 (komplement broja 512). Zbir bi bio 718. Kako smo sabiranjem dva pozitivna broja dobili negativan zbir, znači da imamo prekoračenje.

Množenje i deljenje u nepotpunom komplementu se svode na množenje i deljenje apsolutnih vrednosti, uz promenu znaka rezultata po potrebi. U slučaju deljenja, dobijenom (nenegativnom) ostatku takođe treba promeniti znak, ukoliko je deljenik bio negativan.

Predstavljanje brojeva u nepotpunom komplementu otklanja prvi nedostatak zapisa pomoću znaka i apsolutne vrednosti, zato što sada na svim cifarskim pozicijama mogu da stoje sve cifre u osnovi B. Na primer, sa 3 cifre u dekadnom zapisu u nepotpunom komplementu možemo zapisati čak 999 brojeva (od -499 do $+499$), dok smo u zapisu pomoću znaka i apsolutne vrednosti mogli da zapišemo samo njih 199. Drugi nedostatak je takođe otklonjen u najvećoj meri, jer se sada sabiranje i oduzimanje realizuju jednostavno, sabiranjem i oduzimanjem u neoznačenom smislu. Međutim, u nekim slučajevima potrebno je dodatno sabiranje (oduzimanje) sa jedinicom. Treći nedostatak ostaje i ovde, jer je i u nepotpunom komplementu nulu moguće zapisati na dva načina.

Zapis brojeva u potpunom komplementu

Zapis u potpunom komplementu (engl. *radix complement*) je najznačajniji i najčešće korišćen način zapisivanja celih brojeva. U odnosu na nepotpuni komplement razlika je samo u tome što se koristi druga komplementaciona konstanta: $K^{pk}_{B,n} = B^n$. Ovo za posledicu ima da se neke operacije malo drugačije obavljaju. Primetimo da se komplementaciona konstanta $K^{pk}_{B,n}$ u osnovi B zapisuje kao $100\ldots0$ (jedinica i n nula).

Neka je ponovo data osnova B i zapis $w = c_{n-1}c_{n-2}\ldots c_1c_0$ dužine n u toj osnovi ($c_i \in \{0, 1, \ldots, B-1\}$). *Znak zapisa w u potpunom komplementu* definišemo na identičan način kao i kod nepotpunog komplementa. Dakle, u slučaju parne osnove zapis će biti *nenegativan* ako je cifra najveće težine manja od $B/2$, dok je u suprotnom *negativan*. U slučaju neparne osnove tražimo prvu cifru sa leva u desno koja je različita od $\lfloor B/2 \rfloor$: ako je ta cifra manja od $\lfloor B/2 \rfloor$ zapis je *nenegativan*, a ako je veća, zapis je *negativan*. U slučaju da su sve cifre jednake $\lfloor B/2 \rfloor$, zapis je takođe *nenegativan*.

Operaciju *potpunog komplementa* nad zapisom w u osnovi B dužine n (u oznaci $pk(w)$) definišemo na analogan način kao kod nepotpunog komplementa: $pk(w) = \langle K^{pk}_{B,n} - [w]^{no}_{B} \rangle^{no}_{B,n}$. Dakle, komplementarni zapis određujemo tako što oduzimamo vrednost (neoznačenog) zapisa w od komplementacione konstante. Sa druge strane, jasno je da važi $pk(w) = nk(w)+1$. Otuda se ova operacija najlakše obavlja tako što se najpre odredi nepotpuni komplement zapisa w (zamenom svake cifre c cifrom $B-1-c$), a onda se na dobijenu vrednost doda jedinica. Primeri:

- $B = 10$: Potpuni komplement zapisa 5872 dobija se oduzimanjem $10000 - 5872 = 4128$. Isti rezultat bi se dobio da smo najpre odredili nepotpuni komplement 4127, a zatim na tu vrednost dodali 1.
- $B = 2$: Potpuni komplement zapisa 10101100 možemo dobiti oduzimanjem $100000000 - 10101100 = 01010100$. Drugi način je da odredimo nepotpuni komplement (01010011) a zatim na tu vrednost dodamo jedinicu.
- $B = 5$: Potpuni komplement zapisa 3214 možemo dobiti oduzimanjem $10000 - 3214 = 1231$. Isti rezultat dobili bismo kada bismo odredili nepotpuni komplement (1230), a zatim na tu vrednost dodali jedinicu.

Iz gornjih primera se vidi da je određivanje potpunog komplementa obično jednostavnije preko nepotpunog komplementa, nego direktno, oduzimanjem od komplementacione konstante.

Zapis celog broja x u potpunom komplementu u osnovi B sa n cifara (u oznaci $\langle x \rangle^{pk}_{B,n}$) definišemo na sledeći način:

- ako je broj $x \geq 0$, tada najpre odredimo neoznačeni zapis u osnovi B sa n cifara $\langle x \rangle^{no}_{B,n}$. Ako takav zapis ne postoji, ili postoji ali se ne smatra nenegativnim u smislu gornje definicije, tada ne postoji zapis $\langle x \rangle^{pk}_{B,n}$. Na primer, zapis broja 87 u potpunom komplementu u dekadnoj osnovi sa 5 cifara je 00087, jer je to odgovarajući neoznačeni zapis (a on se smatra nenegativnim u smislu gornje definicije). Sa druge strane, broj 87 se ne može zapisati sa 2 cifre u potpunom komplementu u osnovi 10, zato što njegov dvocifreni neoznačeni zapis 87 nije nenegativan, u smislu gornje definicije. Slično, broj $62_{(10)}$ se ne može zapisati u potpunom komplementu u osnovi 5 sa dve cifre, jer je njegov najkraći neoznačeni zapis 222 trocifren.
- ako je $x < 0$, tada najpre odredimo zapis apsolutne vrednosti $|x|$ u potpunom komplementu u osnovi B sa n cifara. Ako takav zapis postoji, tada je $\langle x \rangle^{pk}_{B,n} = pk(\langle |x| \rangle^{pk}_{B,n})$. Drugim rečima, zapis broja x se dobija operacijom potpunog komplementa nad zapisom apsolutne vrednosti u potpunom komplementu sa istim brojem cifara, ukoliko takav zapis

postoji. Na primer, broj -87 se u potpunom komplementu u dekadnoj osnovi sa 5 cifara zapisuje tako što odredimo zapis broja 87 u potpunom komplementu sa 5 cifara (00087), a zatim izvršimo operaciju potpunog komplementa nad dobijenim zapisom (dobijamo 99913). U binarnoj osnovi, broj $-5_{(10)}$ se u potpunom komplementu sa 8 cifara zapisuje tako što najpre odredimo zapis broja $5_{(10)}$ sa 8 cifara (to je 00000101), a zatim odredimo potpuni komplement (11111011). Specijalno, u slučaju parne osnove B može se dogoditi da zapis broja $x < 0$ sa n cifara u osnovi B postoji čak i ako ne postoji odgovarajući zapis broja $|x|$ iste dužine: ovo se može dogoditi isključivo u slučaju kada je $x = -B^n/2$, u kom slučaju je $\langle x \rangle_{B,n}^{pk} = \langle B/2 \rangle 0 \ldots 0$ (nula se pojavljuje $n-1$ puta). Na primer, za $B = 10$ broj -500 (koji je jednak $-10^3/2$) se sa tri cifre zapisuje kao 500, dok se u slučaju osnove $B = 2$ broj -128 zapisuje kao 10000000 sa 8 cifara (jer je $-128 = -2^8/2$).

Primetimo da se broj $x = 0$ pri fiksiranoj osnovi B i fiksiranom broju cifara n u potpunom komplementu može prikazati samo na jedan način, kao niz od n nula. Zaista, komplementiranjem zapisa $00\ldots0$ dobijamo taj isti zapis, što znači da ne postoji negativan zapis nule, kao u slučaju nepotpunog komplementa.

Zapis celog broja x u potpunom komplementu u osnovi B sa najmanjim mogućim brojem cifara (u oznaci $\langle x \rangle_B^{pk}$) je jednak zapisu $\langle x \rangle_{B,n}^{pk}$ za najmanje n za koje takav zapis postoji.

Određivanje vrednosti date zapisom u potpunom komplementu vrši se na sličan način kao kod nepotpunog komplementa. Neka je data osnova B i zapis $w = c_{n-1}c_{n-2}\ldots c_1c_0$ dužine n u toj osnovi ($c_i \in \{0, 1, \ldots, B-1\}$). Označimo sa $[w]_B^{pk}$ vrednost koja je predstavljena zapisom w u potpunom komplementu u osnovi B. Ukoliko je zapis w u potpunom komplementu nenegativan, tada se njegova vrednost izračunava na isti način kao u slučaju neoznačenog pozicionog zapisa (tj. $[w]_B^{pk} = [w]_B^{no}$). U slučaju negativnog zapisa je $[w]_B^{pk} = [w]_B^{no} - K_{B,n}^{pk}$, gde je n dužina zapisa w. Primeri:

- U osnovi $B = 10$ zapis 73 predstavlja negativan zapis (jer je $7 \geq 10/2$), pa je vrednost $[73]_{10}^{pk} = 73 - 100 = -27$. Zapis 5012 takođe predstavlja negativan zapis, pa je vrednost zapisanog broja $[5012]_{10}^{pk} = 5012 - 10000 = -4988$. Sa druge strane, zapis 1234 predstavlja nenegativan zapis (jer je $1 < 5$), pa je vrednost $[1234]_{10}^{pk} = 1234$.

- U osnovi $B = 2$ zapis 10010 predstavlja negativan zapis (jer počinje jedinicom), pa je vrednost $[10010]_2^{pk} = 10010 - 100000 = -01110_{(2)} = -14_{(10)}$. Zapis 0110 je nenegativan (jer počinje nulom), pa je vrednost $[0110]_2^{pk} = 0110_{(2)} = 6_{(10)}$.

- U osnovi $B = 16$ zapis 8712 predstavlja negativan zapis (jer je $8 \geq 16/2$), pa je vrednost $[8712]_{16}^{pk} = 8712 - 10000 = -78EE_{(16)} =$

$-30958_{(10)}$. Sa druge strane, zapis $6FC$ je nenegativan (jer je $6 < 8$), pa je vrednost $[6FC]_{16}^{nk} = 6FC_{(16)} = 1788_{(10)}$.

- U osnovi $B = 5$ zapis 2421 predstavlja negativan zapis (prva cifra sa leva na desno koja nije jednaka $\lfloor 5/2 \rfloor = 2$ je 4 koja je veća od 2), pa je vrednost $[2421]_5^{pk} = 2421 - 10000 = -2024_{(5)} = -264_{(10)}$. Slično, zapis 412 je negativan (jer je već prva cifra sa leva veća od 2), pa je vrednost $[412]_5^{pk} = 412 - 1000 = -033_{(5)} = -33_{(5)} = -18_{(10)}$. Sa druge strane, zapis 142 je nenegativan (jer je već prva cifra manja od 2), pa je vrednost $[142]_5^{pk} = 142_{(5)} = 47_{(10)}$. Slično, broj 222 predstavlja nenegativan zapis (jer su sve cifre jednake 2), pa je vrednost $[222]_5^{pk} = 222_{(5)} = 62_{(10)}$.

Primetimo da je $[w]_B^{no} - K_{B,n}^{pk} = -(K_{B,n}^{pk} - [w]_B^{no}) = -pk(w)$. Otuda se vrednost negativnog zapisa može odrediti tako što se uradi potpuni komplement zapisa, a zatim se doda znak „-” ispred.

Imajući u vidu gore navedeno, *interval brojeva* koji se mogu zapisati u osnovi B sa n cifara u potpunom komplementu je $I_{B,n}^{pk} = [-B^n/2, B^n/2-1]$ u slučaju parne osnove, a $I_{B,n}^{pk} = [-\lfloor B^n/2 \rfloor, \lfloor B^n/2 \rfloor]$ u slučaju neparne osnove. Na primer, u dekadnom zapisu sa 3 cifre se mogu zapisati brojevi iz intervala $[-500, 499]$. U binarnom sistemu sa 8 cifara se mogu zapisati brojevi iz intervala $[-128, +127]$. U sistemu sa osnovom 5 sa 3 cifre moguće je zapisati brojeve iz intervala $[-222_{(5)}, +222_{(5)}]$, tj. $[-62_{(10)}, +62_{(10)}]$. Primetimo da u slučaju parne osnove imamo interval asimetričan u odnosu na nulu, tj. postoji jedna negativna vrednost više koja se može predstaviti.

Proširivanje zapisa w broja x zapisanog u potpunom komplementu u osnovi B se vrši na identičan način kao i kod nepotpunog komplementa: prvo se utvrdi da li je zapis w nenegativan ili negativan. U prvom slučaju treba dopisati vodeće nule, dok u drugom slučaju treba dopisati odgovarajući broj vodećih cifara $B - 1$. Na primer, dekadni trocifreni zapis 345 se može proširiti na 5 cifara dodavanjem dve vodeće nule (00345), zato što je u pitanju nenegativan zapis. Sa druge strane, zapis 728 se proširuje na 99728. U osnovi $B = 16$, trocifreni zapis 921 se može proširiti na šestocifreni zapis $FFF921$, jer je u pitanju negativan zapis. U osnovi $B = 5$, trocifreni zapis 223 se može proširiti na petocifreni zapis 44223, jer je u pitanju negativan zapis. Specijalno, u binarnom zapisu proširivanje zapisa se svodi na dopisivanje bita znaka ispred zapisa (npr. 01101 se proširuje u 00001101, dok se 10110 proširuje u 11110110).

Promena znaka broja x koji je predstavljen zapisom w u potpunom komplementu u osnovi B dužine n se vrši tako što se obavlja operacija potpunog komplementiranja nad zapisom w (tj. važi $\langle -x \rangle_{B,n}^{pk} = pk(\langle x \rangle_{B,n}^{pk})$). Primetimo da iz ovoga sledi da ako su w i w' zapisi dva suprotna broja x i $-x$ u potpunom komplementu u osnovi B sa n cifara, tada važi $[w]_B^{no} + [w']_B^{no} = K_{B,n}^{pk}$.

Dakle, sabiranjem zapisa w i w' kao neoznačenih brojeva u osnovi B dobijamo komplementacionu konstantu. Ova činjenica je i osnovna karakteristika zapisa u potpunom komplementu. Primeri:

- U osnovi $B = 10$: ako je broj x predstavljen zapisom 5981, tada je broj $-x$ predstavljen zapisom 4019. Primetimo da se potpunim komplementiranjem zapisa 500 dobija isti taj zapis 500. Ovo očigledno nije ispravan rezultat, jer ispada da je broj -500 koji je predstavljen ovim zapisom samom sebi suprotan broj, što naravno nije tačno. Ovo je zbog toga što se suprotan broj $+500$ ne može predstaviti sa tri cifre u dekadnom zapisu u potpunom komplementu (setimo se da je kod parne osnove interval $I^{pk}_{B,n}$ asimetričan).
- U osnovi $B = 2$: ako je broj x predstavljen zapisom 01101101, tada je broj $-x$ predstavljen zapisom 10010011. Slično kao kod dekadne osnove, i ovde se potpunim komplementiranjem zapisa 10000000 dobija isti taj zapis. Ovo je opet zato što se suprotan broj (broj $+128_{(10)}$) ne može predstaviti sa 8 cifara u potpunom komplementu u binarnoj osnovi.
- U osnovi $B = 16$: ako je broj x predstavljen zapisom $D5EF4$, tada je broj $-x$ predstavljen zapisom $2A10C$.
- U osnovi $B = 5$: ako je broj x predstavljen zapisom 1423, tada je broj $-x$ predstavljen zapisom 3022.

Sabiranje brojeva x i y čiji su zapisi u potpunom komplementu u osnovi B sa n cifara redom $\langle x\rangle^{pk}_{B,n} = w_x$ i $\langle y\rangle^{pk}_{B,n} = w_y$ vršimo tako što izračunamo $([w_x]^{no}_B + [w_y]^{no}_B)\ mod\ K^{pk}_{B,n}$. Izračunavanje ove vrednosti se obavlja tako što se zapisi saberu kao neoznačeni brojevi na uobičajen način u osnovi B, pri čemu se eventualno neoznačeno prekoračenje ignoriše (tj. uzima se nižih n cifara rezultata). Primeri:

- U osnovi $B = 10$: sabiranjem $458 + 231 = 689$ dobijamo odgovarajući zbir. Kako je zbir trocifren, to je upravo konačan rezultat. Sa druge strane, sabiranjem $823 + 482 = 1305$ dobijamo rezultat sa jednom cifrom više. Ovu cifru brišemo iz zapisa i dodajemo 305 kao rezultat.
- U osnovi $B = 2$: sabiranjem $1001 + 0111 = 10000$ dobijamo zbir koji ima jednu cifru više. Ovu cifru uklanjamo iz zapisa i dobijamo konačan rezultat: 0000.
- U osnovi $B = 16$: sabiranjem $B43 + 621 = 1164$, pa je rezultat 164.
- U osnovi $B = 5$: sabiranjem $2311 + 1141 = 4002$, što je i konačan rezultat, jer nema dodatne cifre.

Oduzimanje brojeva x i y čiji su zapisi u potpunom komplementu u osnovi B sa n cifara redom $\langle x\rangle_{B,n}^{pk} = w_x$ i $\langle y\rangle_{B,n}^{pk} = w_y$ vršimo tako što izračunamo $([w_x]_B^{no} - [w_y]_B^{no})\ mod\ K_{B,n}^{pk}$. Izračunavanje ove vrednosti se obavlja tako što se zapisi oduzmu kao neoznačeni brojevi na uobičajen način u osnovi B pri čemu se eventualna pozajmica na poziciji cifre najveće težine ignoriše. Primeri:

- U osnovi $B = 10$: oduzimanjem $237 - 491 = 746$ uz pozajmicu na mestu najveće težine koju ignorišemo.
- U osnovi $B = 2$: oduzimanjem $1010 - 1100 = 1110$ uz pozajmicu na mestu najveće težine koju ignorišemo.
- U osnovi $B = 16$: oduzimanjem $3EF - 52D = EC2$ uz pozajmicu na mestu najveće težine koju ignorišemo.
- U osnovi $B = 5$: oduzimanjem $3412 - 2101 = 1311$, bez pozajmice.

Drugi način da se izvrši oduzimanje je da se ono svede na sabiranje sa suprotnom vrednošću. Na primer, umesto da oduzimamo 237 i 491 u osnovi 10, možemo sabrati $237+509 = 746$ (jer je 509 zapis broja -491 u potpunom komplementu). Slično, umesto oduzimanja $1010 - 1100$ u osnovi 2, možemo sabrati $1010 + 0100 = 1110$. Oduzimanje $3EF - 52D$ u osnovi 16 se može svesti na sabiranje $3EF + AD3 = EC2$. Najzad, oduzimanje $3412 - 2101$ u osnovi 5 se svodi na sabiranje $3412 + 2344 = 1311$ uz prenos na poslednjoj poziciji koji se ignoriše.

Prekoračenje prilikom sabiranja i oduzimanja dva broja zapisana sa n cifara u osnovi B u potpunom komplementu se može dogoditi ukoliko prilikom izvođenja operacije izađemo iz intervala $I_{B,n}^{pk}$. Ovo se manifestuje tako što je zapis dobijenog rezultata nekonzistentnog znaka. Postupak je identičan kao kod nepotpunog komplementa. Dakle, do prekoračenja kod sabiranja dolazi ako su oba sabirka pozitivna, a dobijeni zbir je negativan, ili ako su oba sabirka negativna, a dobijeni zbir je pozitivan. Sabiranjem brojeva suprotnog znaka ne može doći do prekoračenja. Kod oduzimanja imamo prekoračenje ako je umanjenik pozitivan, a umanjilac i dobijena razlika negativni, ili ako je umanjenik negativan, a umanjilac i dobijena razlika pozitivni. Ako oduzimanje izvodimo svođenjem na sabiranje sa suprotnim brojem, tada primenjujemo pravila za detekciju prekoračenja kod sabiranja.

Množenje i deljenje u potpunom komplementu se svodi na množenje i deljenje apsolutnih vrednosti, uz promenu znaka rezultata po potrebi. Slično kao i ranije, ukoliko je prilikom deljenja deljenik negativan, tada je potrebno dobijenom (nenegativnom) ostatku takođe promeniti znak.

U slučaju množenja, ukoliko rezultat množenja dva broja x i y zapisanih u potpunom komplementu u osnovi B sa n cifara može da stane u n cifara, tada se množenje može obaviti i direktno, tako što se zapisi brojeva x i y pomože kao da su neoznačeni, a onda se za rezultat uzme nižih n cifara. Na primer, ako imamo brojeve 12 i -75 koji su zapisani u potpunom komplementu u osnovi 10 sa 4 cifre (to su zapisi 0012 i 9925), njihov proizvod se može odrediti direktnim množenjem ova dva zapisa kao da su neoznačeni: $0012 \cdot 9925 = 119100$. Za rezultat uzimamo niže 4 cifre, i dobijamo 9100. Ovo je zaista zapis broja -900 koji je proizvod brojeva 12 i -75. Naravno, ovo važi samo zato što su brojevi dovoljno mali da njihov proizvod može biti zapisan sa 4 cifre u potpunom komplementu u osnovi 10. Da nije tako, morali bismo da proširimo zapise činilaca pre množenja, ili da prosto pomnožimo apsolutne vrednosti i po potrebi promenimo znak.

Predstavljanje brojeva u potpunom komplementu otklanja sve nedostatke prethodnih načina zapisivanja. Operacije sabiranja i oduzimanja se obavljaju na identičan način kao u neoznačenom slučaju. Nula, kao i svi ostali brojevi, ima jedinstven zapis, pa je preslikavanje $x \mapsto \langle x \rangle_{B,n}^{pk}$ jednoznačno. Zbog toga se ovaj način zapisivanja danas gotovo isključivo koristi za predstavljanje celih brojeva u računaru. Njegova binarna varijanta je naročito jednostavna, a dopušta i značajno efikasniju implementaciju množenja (tzv. *Butov algoritam*), o čemu će biti više reči kasnije.

Zapisivanje pomoću uvećanja

Zapis sa uvećanjem K u osnovi B sa n cifara (u oznaci $\langle x \rangle_{B,n}^{K}$) podrazumeva da se broj x predstavi odgovarajućim neoznačenim zapisom broja $x + K$. Drugim rečima, važi $\langle x \rangle_{B,n}^{K} := \langle x + K \rangle_{B,n}^{no}$. Interval brojeva koji se mogu predstaviti na ovaj način biće $I_{B,n}^{K} = [-K, B^n - 1 - K]$. Dakle, ovaj način zapisivanja brojeva omogućava da se predstave negativni brojevi koji su veći od $-K$. Na primer, broj $-K$ bi se zapisao kao $00\ldots0$ (sa n nula) broj $-K+1$ bi se zapisao kao $00\ldots01$ (sa n cifara u zapisu), i sl. Obično se konstanta K bira tako da interval koji se može predstaviti bude što je moguće više simetričan u odnosu na nulu. Na primer, ako je osnova $B = 2$, a $n = 8$, tada možemo uzeti konstantu $K = 127$. U tom slučaju bi interval brojeva koji se mogu predstaviti bio $[-127, +128]$.