

Detekcija i korekcija grešaka

Jovana Kovačević

www.uoar1.matf.bg.ac.rs

Uvod u organizaciju i arhitekturu računara 1

Greške

- Prilikom prenosa podataka kroz komunikacione kanale može doći do promena pojedinih bitova usled smetnji na prenosnom putu ili zbog šumova kod uređaja pošiljaoca i primaoca
- Do ovakvih smetnji može doći i prilikom prenosa podataka unutar istog računarskog sistema kao i pri čuvanju podataka u memorijskim medijumima
- Ovakve promene nazivamo greškama u zapisu podataka

Otkrivanje i korekcija grešaka

- Algoritmi za otkrivanje grešaka
 - jednostavniji
 - pružaju informaciju da je greška detektovana ali je ne ispravljaju već zahtevaju ponovni prenos ili upis podataka
- Algoritmi za korekciju grešaka
 - komplikovaniji, zahtevaju više kontrolnih bitova
 - omogućavaju rekonstrukciju početnog niza bitova

Kodovi

- P - poruka od m bitova
- $C = K(P)$ - kodna reč od $m + n$ bitova
 - dodatnih n bitova predstavljaju kontrolne bitove
 - kontrolni bitovi se mogu dodati na kraj poruke ili se umetnuti unutar bitova poruke
- postoji ukupno 2^m poruka dužine m i ukupno 2^{m+n} kodnih reči dužine $m + n$
- od svih 2^{m+n} kodnih reči, svega je 2^m *ispravnih*
- skup svih ispravnih kodnih reči nazivamo kodom K

Primer

- razmatramo sve poruke dužine $m = 2$
- neka se jedan dodatni bit ($n = 1$) se navodi na kraju poruke i postavlja tako da ukupan broj jedinica bude paran (*metoda kontrole parnosti*)
- kodnih reči je ukupno $2^{m+n} = 2^{2+1} = 8$ i to su:

000	001
010	011
100	101
110	111

- od 2^3 kodnih reči, ukupno je 2^2 ispravnih
- kod K čine ispravne reči $\{000, 011, 101, 111\}$

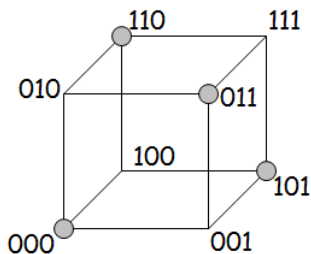
Hamingovo rastojanje

- Hamingovo rastojanje između dve niske x i y je broj pozicija na kojima se njihovi bitovi razlikuju
 - na primer, Hamingovo rastojanje između 10110101 i 01101011 iznosi 6
- ako je C originalna kodna reč, a C' , tada njihovo Hamingovo rastojanje zovemo obimom greške u oznaci $d(C, C')$

Interpretacija preko hiperkocke

Hamingovo rastojanje koda K u oznaci $d(K)$ predstavlja najmanje Hamingovo rastojanje između njegove dve (ispravne) kodne reči

- na primer, Hamingovo rastojanje koda $K=\{000, 011, 101, 111\}$ iznosi 2



Kodovi za detekciju i korekciju grešaka

- Koliko treba da bude $d(K)$ kod koda za detekciju grešaka a koliko kod koda za korekciju grešaka obima d ?
- za otkrivanje grešaka obima $\leq d$: $d(K) \geq d + 1$
- za korekciju grešaka obima $\leq d$: $d(K) \geq 2 \cdot d + 1$

Otkrivanje grešaka I

- najjednostavnija metoda za otkrivanje grešaka je kontrola parnosti
- kontrolni bit se dodaje na kraju poruke i ima vrednost takvu da je ukupan broj jedinica paran
- može da detektuje neparan broj grešaka, na primer:
 - $P = 1011010111, m = 10, n = 1$

$$C = 10110101111$$

$$C' = 10100101111$$

$$C \oplus C' = 00010000000$$

- $d(C, C') = 1$ što znači da postoji greška obima 1; C' ima neparan broj jedinica i ukazuje da je došlo do greške

Otkrivanje grešaka II

- ne može da detektuje paran broj grešaka
 - primer: $P = 1011010111$, $m = 10$, $n = 1$

$$C = 1011010111$$

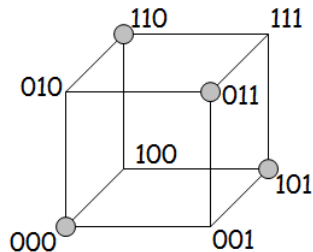
$$C'' = 0010010111$$

$$C \oplus C'' = 1001000000$$

- $d(C, C'') = 2$ što znači da postoji greška obima 2; C'' sadrži paran broj jedinica što nije signal da je došlo do greške

Korekcija grešaka I

- vratimo se na primer gde je $m = 2$, $n = 1$ i gde se se kod može predstaviti hiperkockom
- ograničimo se na greške obima 1 ($d(C, C') = 1$)
- zašto pomoću ovog koda ne možemo korigovati greške?



- neka je $K_d(C) = \{C' | d(C, C') \leq d\}$ d -okolina kodne reči C za rastojanje d

Korekcija grešaka II

- crna temena su ispravne kodne reči, a bela neispravne
- u 1-okolini svakog belog temena su tri crna temena što znači da za uočenu grešku imamo tri moguća ispravna rešenja
- zbog toga pomoću ovog koda možemo samo detektovati da je došlo do greške ali ne možemo ispraviti
- potrebno nam je još kontrolnih bitova - koliko minimalno?
- posmatrajmo 1-okoline ispravnih kodnih reči:
 $K_1(000) = \{000, 001, 100, 010\}$
 $K_1(101) = \{101, 111, 100, 001\}$
 $K_1(011) = \{011, 010, 111, 001\}$
 $K_1(110) = \{110, 111, 010, 100\}$
- 1-okoline ispravnih kodnih reči nisu međusobno disjunktne što znači da jedna pogrešna kodna reč može biti na istom rastojanju od dve tačne kodne reči

Korekcija grešaka III

- svaka 1-okolina ima ukupno $m + n + 1$ elemenata; koliko najmanje treba da bude broj kontrolnih bitova n za datu dužinu poruke m da bi 1-okoline bile disjunktne?
- kada na poruku dodamo n kontrolnih bitova, za fiksiranu poruku, kodnih reči ima dužine 2^n
- da bi 1-okoline bile disjunktne, za dato m treba izabrati n tako da važi $m + n + 1 \leq 2^n$

Hamingov kod

- jedan od kodova za korekciju grešaka je Hamingov kod
- neka je $m = 4$; najmanje n za kod koji se može koristiti za korekciju grešaka (tako da važi $m + n + 1 \leq 2^n$) je $n = 3$
- primer
- Hamingov kod u opštem slučaju za proizvoljno $(m + n, n)$