Označeni zapisi celih brojeva

Jovana Kovačević

www.uoar1.matf.bg.ac.rs

Uvod u organizaciju i arhitekturu računara 1

Pregled

Pregled

Zapisi broja

- *neoznačeni zapis broja*
  ne sadrže informaciju o znaku broja
- *označeni zapis broja*
  ne sadrže informaciju o znaku broja
- označenost je karakteristika zapisa
- zapis broja x u osnovi B (sa minimalnim brojem cifara)
- zapis broja x u osnovi B sa fiksnim brojem cifara

Pregled

Znak i apsolutna vrednost

- vodeća cifra kodira znak
- najmanjom cifrom u osnovi B (što je uvek 0) kodira se $+$, a najvećom $-$
- zapis broja na n cifara dobijamo tako što zapišemo apsolutnu vrednost broja kao neoznačeni broj na $n-1$ cifara i dopišemo odgovarajuću cifru za znak
- na primer:
  $B = 10$, broj $+87$ zapisujemo kao 087, a broj -87 kao 987 (zapis sa minimalnim brojem cifara)
  $B = 10$, zapis broja $+87$ sa 5 cifara: 00087, a broja -87 kao 90087

Primeri

- $B = 5$, broj $(+35)_{10}$ zapisujemo kao 0120, a broj $(-35)_{10}$ kao 4120 (zapis sa minimalnim brojem cifara)
- $B = 2$, broj $(+25)_{10}$ sa 8 cifara zapisujemo kao 00011001, a broj $(-25)_{10}$ kao 10011001; zapis sa minimalnim brojem cifara: 011001 i 111001
- $B = 16$, broj $(+35)_{10}$ sa minimalnim brojem cifara zapisujemo kao 023, a broj $(-35)_{10}$ kao $F23$; zapis sa 5 cifara: 00023 i $F0023$

Interval

- B - osnova, n - broj cifara

$$[-(B^{n-1} - 1), B^{n-1} - 1]$$

- na primer:
  $B = 10, n = 3, [-99, 99]$
  $B = 10, n = 3, [-127, 127]$
- nula se uvek može zapisati kao $+0$ i -0

Operacije

- promena znaka
  menja se cifra znaka, iz 0 u $B-1$ ili obrnuto
- sabiranje $zbir = a + b$
  neka je $s_{max} = max\{|a|, |b|\}, s_{min} = min\{|a|, |b|\}$
  - ako $sgn(a) == sgn(b)$ onda
    $sgn(zbir) = sgn(a), |zbir| = |a| + |b|$
  - ako $sgn(a)! = sgn(b)$ onda
    $sgn(zbir) = sgn(s_{max}), |zbir| = |s_{max}| - |s_{min}|$
- oduzimanje $razlika = a - b$
  - ako $sgn(a)! = sgn(b)$ onda
    $sgn(razlika) = sgn(a), |razlika| = |a| + |b|$
  - ako $sgn(a) == sgn(b)$ onda $|razlika| = |s_{max}| - |s_{min}|$, a $sgn(razlika)$ zavisi od znaka sabiraka:
    - ako su negativni, postupak se svodi na sabiranje brojeva različitog znaka
    - ako su pozitivni i $a > b$, znak je pozitivan, a u suprotnom negativan

Operacije

- prekoračenje
  - javlja se kada prilikom sabiranja apsolutnih vrednosti sa $n-1$ cifara dobijemo zbir sa n cifara
  - kod sabiranja, samo kada $sgn(a) == sgn(b)$
  - kod oduzimanja, samo kada $sgn(a)! = sgn(b)$
- množenje i deljenje $proizvod = a \cdot b, a = ceo\_deo \cdot b + ostatak$
  - ako $sgn(a) == sgn(b)$ onda $sgn(proizvod) = sgn(ceo\_deo) = +$
  - ako $sgn(a)! = sgn(b)$ onda $sgn(proizvod) = sgn(ceo\_deo) = -$
  - $sgn(ostatak) = sgn(a)$
  - apsolutna vrednost proizvoda/celog dela/ostatka se dobija kao proizvod/ceo deo/ostatak pri množenju/deljenju apsolutnih vrednosti operanada

Nedostaci

- zapisivanje znaka zahteva jednu dodatnu cifru
  - na primer, za $B = 10, n = 3$ možemo zapisati 199 brojeva, a ima mesta za 1000 (na prvoj poziciji se koriste samo cifre 0 i 9)
  - kod binarnog zapisa, ovo nije mana jer nema drugih cifara
- komplikovana implementacija sabiranja i oduzimanja zbog grananja po slučajevima
- zapis nule nije jednoznačan

Nepotpuni komplement

- Neka je dat zapis $w = c_{n-1}c_{n-2}\ldots c_1c_0$ dužine n u osnovi B ($c_i \in \{0, \ldots, B-1\}$). Tada znak zapisa w u nepotpunom komplementu definišemo na sledeći način:
  - ako je B parno, tada:
    - ako važi $c_{n-1} < B/2$, onda za zapis w kažemo da je nenegativan
    - ako važi $c_{n-1} \geq B/2$, onda za zapis w kažemo da je negativan
  - ako je B neparno, tada proverimo idući sleva nadesno da li postoji cifra različita od $\lfloor B/2 \rfloor$. Ako ne postoji, tada se zapis w sastoji samo od cifara $\lfloor B/2 \rfloor$ i smatra se nenegativnim. Ako postoji, neka je to cifra c_x. Tada:
    - ako važi $c_x < \lfloor B/2 \rfloor$, onda za zapis w kažemo da je nenegativan
    - ako važi $c_{n-1} \geq \lfloor B/2 \rfloor$, onda za zapis w kažemo da je negativan

Komplementaciona konstanta

- Ako je B osnova a n broj cifara, komplementaciona konstanta se definiše kao

$$K_{B,n}^{nk} = B^n - 1$$

- na primer:
  - $B = 10, n = 3, K_{10,3}^{nk} = 999$
  - $B = 5, n = 2, K_{5,2}^{nk} = 44$
  - $B = 2, n = 8, K_{2,8}^{nk} = 11111111$
- komplementaciona konstanta se uvek zapisuje nizom od n najvećih cifara u osnovi B

Operacija nepotpunog komplementa

- Neka je $[w]_B^{no}$ neoznačeni zapis broja u zapisu w. Tada se operacija nepotpunog komplementa u oznaci $nk(w)$ definiše na sledeći način:

$$nk(w) = \langle K_{B,n}^{nk} - [w]_B^{no} \rangle_{B,n}^{no}$$

- primeri:
  - $B = 10, nk(5712) = 4287$
  - $B = 5, nk(2143) = 2301$
  - $B = 2, nk(100110) = 011001$
- operacija se jednostavno obavlja tako što se svaka cifra c oduzme od najveće cifre brojevnog sistema $B - 1$

Zapis nenegativnih brojeva

Zapis celog broja x u nepotpunom komplementu sa n cifara u osnovi B (u oznaci $\langle x \rangle_{B,n}^{nk}$ definišemo na sledeći način):

- ako je $x \geq 0$, potrebno je odrediti zapis neoznačenog broja $\langle x \rangle_{B,n}^{no}$
  - ako se broj x ne može zapisati pomoću n cifara ili može ali se dobijeni zapis smatra nenegativnim, tada ne postoji zapis $\langle x \rangle_{B,n}^{nk}$
  - na primer, broj 87 se može zapisati sa 5 cifara u dekadnoj osnovi: $(87)_{10,5}^{nk} = 00087$; dobijeni zapis se smatra nenegativnim
  - sa druge strane, broj 87 se ne može zapisati sa 2 cifre u dekadnoj osnovi; taj zapis bi bio $(87)_{10,2}^{nk} = 87$, ali se ovakav zapis smatra negativnim, sto ne odgovara znaku broja

Zapis negativnih brojeva

- ako je $x \leq 0$, tada se zapis broja x dobija operacijom nepotpunog komplementa nad zapisom broja $|x|$ u nepotpunom komplementu sa istim brojem cifara, pod uslovom da takav zapis postoji i da se njegovim komplementiranjem dobija negativan zapis
  - na primer, broj -87 u nepotpunom komplementu sa dve cifre ne postoji, jer ne postoji zapis njegove apsolutne vrednosti sa dve cifre (87 se smatra negativnim brojem)
  - broj -5_{10} se u nepotpunom komplementu u binarnoj osnovi zapisuje tako što prvo odredimo zapis apsolutne vrednosti: $(5_{10})^{n}_{2,8}k = 00000101$, a potom odredimo nepotpuni komplement: 11111010.

Zapis negativnih brojeva

- Specijalno, ako je osnova B neparna i zapis broja $|x|$ se sastoji od n cifara $\lfloor B/2 \rfloor$, tada nije moguće zapisati odgovarajući negativan broj $-|x|$ pomoću n cifara
  - na primer, broj -62_{10} nije moguće zapisati u osnovi 5 pomoću 3 cifre jer se njegova apsolutna vrednost zapisuje kao $(62_{10})^{n}_{5,3}k = 222$, a komplementiranjem tog broja se opet dobija broj 222 koji se smatra nenegativnim

Zapis nule

- za osnovu B i broj cifara n, nula se može napisati na dva načina: kao niz $0 \dots 0$ dužine n ili kao niz $(B-1)\dots(B-1)$ dužine n
- na primer:
  - $B = 10, n = 3$ nula se zapisuje kao 000 i 999
  - $B = 2, n = 8$ nula se zapisuje kao 00000000 i 11111111

Određivanje vrednosti predstavljene nenegativnim zapisom

Neka je B osnova, $w = c_{n-1}c_{n-2}\ldots c_1c_0$ zapis dužine n u toj osnovi i $[w]_B^{nk}$ vrednost broja predstavljenog zapisom w u nepotpunom komplementu. Tada vrednost $[w]_B^{nk}$ određujemo na sledeći način:

- ako je zapis w nenegativan, tada se njegova vrednost u nepotpunom komplementu izračunava na isti način kao kod neoznačenog pozicionog zapisa,

Određivanje vrednosti predstavljene nenegativnim zapisom

Na primer:

- zapis $(1234)_{10}^{nk}$ se smatra nenegativnim, pa je njegova vrednost $(1234)_{10}$
- zapis $(6FC)_{16}^{nk}$ se smatra nenegativnim, pa je njegova vrednost $(6FC)_{16} = (1788)_{10}$
- zapis $(0110)_{2}^{nk}$ se smatra nenegativnim, pa je njegova vrednost $(0110)_2 = (6)_{10}$
- zapis $(142)_{5}^{nk}$ se smatra nenegativnim, pa je njegova vrednost $(142)_5 = (47)_{10}$
- zapis $(2142)_{5}^{nk}$ se smatra nenegativnim (jer je prva cifra različita od $\lfloor B/2 \rfloor$ manja od te vrednosti), pa je njegova vrednost $(2142)_5 = (297)_{10}$
- zapis $(222)_{5}^{nk}$ se smatra nenegativnim, pa je njegova vrednost $(222)_5 = (62)_{10}$

Određivanje vrednosti predstavljene negativnim zapisom

- ako je zapis w negativan, tada se njegova vrednost u nepotpunom komplementu izračunava komplementiranjem zapisa w:

$$[w]_B^{nk} = [w]_B^{no} - K_{(B,n)}^{nk}$$

- ova razlika odgovara negaciji operacije nepotpunog komplementa broja: $-nk(w)$

Određivanje vrednosti predstavljene negativnim zapisom

Na primer:

- zapis $(73)_{10}^{nk}$ se smatra negativnim (jer $7 \geq 10/2$), pa je njegova vrednost $(73)_{10} - (99)_{10} = (-26)_{10}$
- zapis $(8712)_{16}^{nk}$ se smatra negativnim (jer $8 \geq 16/2$), pa je njegova vrednost
$(8712)_{16} = (8712)_{16} - (FFFF)_{16} = (-78ED)_{16} = -30957_{10}$
- zapis $(10010)_{2}^{nk}$ se smatra negativnim, pa je njegova vrednost $(10010)_2 - (11111)_2 = (-01101)_2 = (-13)_{10}$
- zapis $(2421)_{5}^{nk}$ se smatra negativnim, pa je njegova vrednost $(2421)_5 - (4444)_5 = (-2023)_5 = (-263)_{10}$

Interval

- B parno

$$[-(B^n/2-1), B^n/2-1]$$

primeri:

  - $B=10, n=3, [-499, 499]$
  - $B=2, n=8, [-127, 127]$

- B neparno

$$[-(\lfloor B^n/2\rfloor-1), \lfloor B^n/2\rfloor]$$

primer:

  - $B=5, n=3, [-221_5, 222_5]=[-61_{10}, 62_{10}]$
  - broj 62_{10} se u nepotpunom komplementu zapisuje kao 222; ako bismo primenili postupak za zapis negativnih brojeva, potrebno je da komplementiramo zapis, čime dobijamo 222, što je nenegativan zapis; odatle sledi da se broj -62_5 ne može zapisati u nepotpunom komplementu u osnovi 5 pomoću 3 cifre

Proširivanje zapisa

- ako je zapis broja w nenegativan, potrebno je dopisati odgovarajući broj vodećih nula
  primeri:
  - $B = 10, n = 3$,zapis 345 se može proširiti na 5 cifara dodavanjem dve nule: 00345
  - $B = 2, n = 5$,zapis 01101 se može proširiti na 8 cifara dodavanjem tri nule: 00001101
- ako je zapis broja w negativan, potrebno je dopisati odgovarajući broj vodećih cifara $B - 1$
  primeri:
  - $B = 10, n = 3$,zapis 728 se može proširiti na 5 cifara dodavanjem dve cifre 9: 99728
  - $B = 16, n = 3$,zapis 921 se može proširiti na 6 cifara dodavanjem tri cifre F: $FFF921$
  - $B = 5, n = 3$,zapis 223 se može proširiti na 5 cifara dodavanjem dve cifre 4: 44223

Promena znaka

- promena znaka u zapisu w se obavlja kao operacija komplementacije nad zapisom w:

$$\langle -x \rangle_{B,n}^{nk} = nk(\langle -x \rangle_{B,n}^{nk})$$

- primeri:
  - ako je $B = 10$ i broj x predstavljen zapisom 5981, tada je $-x$ predstavljen zapisom 4018
  - ako je $B = 2$ i broj x predstavljen zapisom 01101101, tada je $-x$ predstavljen zapisom 10010010
  - ako je $B = 16$ i broj x predstavljen zapisom $D5EF4$, tada je $-x$ predstavljen zapisom $2A10B$
  - ako je $B = 5$ i broj x predstavljen zapisom 1243, tada je $-x$ predstavljen zapisom 3021

Promena znaka

- specijalno, ako je $B = 5$ i broj x predstavljen zapisom 222, ovim postupkom bi $-x$ bio predstavljen istim zapisom 222 koji odgovara pozitivnom broju što je pogrešno; to znači da se odgovarajući negativan broj ne može predstaviti istim brojem cifara; ovaj slučaj je posledica asimetričnosti intervala kod neparne osnove

Sabiranje

- Sabiranje brojeva x i y u nepotpunom komplementu u osnovu B sa n cifara čiji su zapisi redom $\langle x\rangle_{B,n}^{nk} = w_x$ i $\langle y\rangle_{B,n}^{nk} = w_y$ vrši se izračunavanjem izraza

$$([w_x]_N^{no} + [w_y]_N^{no}) mod K_{B,n}^{nk}$$

- ovaj izraz se izračunava tako što najpre izvršimo sabiranje neoznačenih brojeva i ako se rezultat zapisuje pomoću n cifara, to je zapis zbira u nepotpunom komplementu, a ako se zapisuje pomoću $n + 1$ cifara, pri čemu cifra najveće težine mora biti 1, tada vodeću jedinicu treba obrisati sa početka zapisa i dodati je na mesto najmanje težine

Sabiranje

- $B = 10, 458 + 231 = 689$
- $B = 10, 823 + 482 = 1305$, pošto je dobijeni rezultat četvorocifren, početnu jedinicu brišemo i dodajemo na mesto najmanje težine i dobijamo 306
- $B = 16, B43 + 621 = 1164$, pošto je dobijeni rezultat četvorocifren, početnu jedinicu brišemo i dodajemo na mesto najmanje težine i dobijamo 165
- $B = 2, 1001 + 0111 = 10000$, pošto je dobijeni rezultat petorocifren, početnu jedinicu brišemo i dodajemo na mesto najmanje težine i dobijamo 0001
- $B = 5, 2311 + 1141 = 4002$

Oduzimanje

- Oduzimanje brojeva x i y u nepotpunom komplementu u osnovu B sa n cifara čiji su zapisi redom $\langle x \rangle_{B,n}^{nk} = w_x$ i $\langle y \rangle_{B,n}^{nk} = w_y$ vrši se izračunavanjem izraza

$$([w_x]_N^{no} - [w_y]_N^{no}) mod K_{B,n}^{nk}$$

- ovaj izraz se izračunava tako što najpre izvršimo oduzimanje neoznačenih brojeva i ako nije bilo pozajmice na mestu cifre najveće težine, dobijeni zapis predstavlja zapis razlike u nepotpunom komplementu, a ako jeste, tada cifru 1 treba oduzeti od cifre najmanje težine

Oduzimanje

- $B = 10, 237 - 491 = 746$ uz pozajmicu na mestu najveće težine; oduzimanjem te jedinice dobijamo 745
- $B = 16, 3EF - 52D = EC2$ uz pozajmicu na mestu najveće težine; oduzimanjem te jedinice dobijamo $EC1$
- $B = 2, 1010 - 1100 = 1110$ uz pozajmicu na mestu najveće težine; oduzimanjem te jedinice dobijamo 1101
- $B = 5, 3412 - 2101 = 1311$

Oduzimanje

- Oduzimanje se može realizovati i kao sabiranje sa suprotnom vrednošću
- primeri:
- $B = 10, 237 - 491 = 237 + 508 = 745$
- $B = 16, 3EF - 52D = 3EF + AD2 = EC1$
- $B = 2, 1010 - 1100 = 1010 + 0011 = 1101$
- $B = 5, 3412 - 2101 = 3412 + 2343 = 11310$, kada se dodatna jedinica ukloni sa najviše pozicije i sabere, dobija se 1311

Prekoračenje kod sabiranja

- Do prekoračenja kod sabiranja dva broja zapisanih sa n cifara u osnovi B dolazi kada dobijeni rezultat izlazi iz intervala $I_{B,n}^{nk}$
- Do prekoračenja može doći kada se sabiraju dva broja istog znaka
- Prekoračenje se manifestuje tako što je znak zbira različit od znaka sabiraka
- primeri:
  - $B = 10, 345 + 391 = 745$, dobijeni rezultat je negativan što znači da je došlo do prekoračenja
  - $B = 10, 931 + 512 = 444$, dobijeni rezultat je pozitivan što znači da je došlo do prekoračenja

Prekoračenje kod oduzimanja

- Do prekoračenja kod oduzimanja dva broja zapisanih sa n cifara u osnovi B dolazi kada dobijeni rezultat izlazi iz intervala $I_{B,n}^{nk}$
- Do prekoračenja može doći kada se oduzimaju brojevi suprotnog znaka
- Prekoračenje se manifestuje tako što znak rezultata nije odgovarajuć
- primeri:
  - $B = 10, 231 - 512 = 718$, oduzimanjem pozitivnog i negativnog broja dobijen je negativan broj sto znači da je došlo do prekoračenja
  - ako bismo oduzimanje realizovali kao sabiranje sa suprotnom vrednošću, onda kod prekoračenja važe pravila za sabiranje: $B = 10, 231 - 512 = 231 + 487 = 718$, dobijen je negativan broj kao zbir dva pozitivna što znači da je došlo do prekoračenja

Množenje i deljenje

- Množenje i deljenje u nepotpunom komplementu se svode na množenje i deljenje apsolutnih vrednosti uz promenu znaka po potrebi
- Kao i kod zapisa znak i apsolutna vrednost, znak ostatka je isti kao znak deljenika

Nk vs zav

U odnosu na zapis znak i apsolutna vrednost, zapis nepotpuni komplement otklanja prva dva nedostatka:

- na prvoj poziciji mogu biti sve cifre sistema čime je proširen interval; na primer, za $B = 10, n = 3$, moguće je predstaviti čaj 999 brojeva u intervalu $[-499, 499]$ dok je prethodni zapis mogao da prestavi samo 199
- sabiranje i oduzimanje su pojednostavljeni i realizuju se kao sabiranje i oduzimanje neoznačenih brojeva; ipak, u nekim slučajevima je potreban dodatni korak dodavanja/oduzimanja jedinice

Treći nedostatak ostaje, jer se nula i u nepotpunom komplementu može zapisati na dva načina

Potpuni komplement

- najznačajniji i najčešće korišćen način zapisivanja označenih brojeva
- razlika u odnosu na nepotpuni komplement: komplementaciona konstanta $K_{B,n}^{pk} = B^n$
- komplementaciona konstanta $K_{B,n}^{pk}$ se zapisuje kao $1\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ puta}}$
- znak zapisa w u potpunom komplementu određujemo na isti način kao u nepotpunom komplementu

Operacija potpunog komplementa

- operaciju potpunog komplementa u oznaci $pk(w)$ definišemo kao u slučaju nepotpunog komplementa:

$$pk(w) = \langle K^{pk}_{B,n} - [w]^{no}_{B} \rangle^{no}_{B,n}$$

- komplementarni zapis određujemo tako što oduzmemo vrednost neoznačenog zapisa w od komplementacione konstante
- s obzirom da je komplementaciona konstanta kod potpunog komplementa za 1 veća od odgovarajuće komplementacione konstante kod nepotpunog komplementa, važi $pk(w) = nk(w) + 1$
- primeri:
  - $B = 10, pk(5872) = 4128$
  - $B = 5, pk(3214) = 1231$
  - $B = 2, pk(10101100) = 01010100$

Zapis nenegativnih brojeva

Zapis celog broja x u potpunom komplementu sa n cifara u osnovi B (u oznaci $\langle x\rangle^{pk}_{B,n}$ definišemo na sledeći način):

- ako je $x \geq 0$, potrebno je odrediti zapis neoznačenog broja $\langle x\rangle^{no}_{B,n}$
  - ako se broj x ne može zapisati pomoću n cifara ili može ali se dobijeni zapis smatra nenegativnim, tada ne postoji zapis $\langle x\rangle^{pk}_{B,n}$
  - na primer, broj 87 se može zapisati sa 5 cifara u dekadnoj osnovi: $(87)^{pk}_{10,5} = 00087$; dobijeni zapis se smatra nenegativnim
  - sa druge strane, broj 87 se ne može zapisati sa 2 cifre u dekadnoj osnovi; taj zapis bi bio $(87)^{pk}_{10,2} = 87$, ali se ovakav zapis smatra negativnim, sto ne odgovara znaku broja

Zapis negativnih brojeva

- ako je $x \leq 0$, tada se zapis broja x dobija operacijom potpunog komplementa nad zapisom broja $|x|$ u potpunom komplementu sa istim brojem cifara, pod uslovom da takav zapis postoji i da se njegovim komplementiranjem dobija negativan zapis
  - na primer, broj -87 u potpunom komplementu sa 5 cifara zapisuje tako što prvo odredimo zapis apsolutne vrednosti: $(87_{10})^{pk}_{10,5} = 00087$, a potom odredimo potpuni komplement: 99913
  - broj -5_{10} se u potpunom komplementu u binarnoj osnovi zapisuje tako što prvo odredimo zapis apsolutne vrednosti: $(5_{10})^{pk}_{2,8} = 00000101$, a potom odredimo potpuni komplement: 11111011.

Zapis negativnih brojeva

- Specijalno, u slučaju da je osnova B parna, može se dogoditi da negativan broj x može da se zapiše sa n cifara u toj osnovi čak i ako broj $|x|$ ne može
- ovo se može dogoditi isključivo u slučaju kada je $x = -B^n/2$, kada je $\langle x \rangle_{B,n}^{pk} = B/2\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ puta}}$
- primeri:
    - za $B = 10$, broj $-500 = -10^3/2$ se sa tri cifre zapisuje kao 500, dok broj 500 nije moguće zapisati pomoću tri cifre
    - za $B = 2$, broj $-128 = -2^8/2$ se sa osam cifara zapisuje kao 10000000, dok broj 128 nije moguće zapisati pomoću osam cifara

Zapis nule

- u potpunom komplementu nula ima jedinstveni zapis: $0 \ldots 0$
- komplementiranjem ovog zapisa se dobija polazni zapis

Određivanje vrednosti predstavljene nenegativnim zapisom

Neka je B osnova, $w = c_{n-1}c_{n-2}\ldots c_1c_0$ zapis dužine n u toj osnovi i $[w]_B^{pk}$ vrednost broja predstavljenog zapisom w u potpunom komplementu. Tada vrednost $[w]_B^{pk}$ određujemo na sledeći način:

- ako je zapis w nenegativan, tada se njegova vrednost u potpunom komplementu izračunava na isti način kao kod nepotpunog komplementa i neoznačenog pozicionog zapisa

Određivanje vrednosti predstavljene nenegativnim zapisom

Na primer:

- zapis $(1234)_{10}^{pk}$ se smatra nenegativnim, pa je njegova vrednost $(1234)_{10}$
- zapis $(6FC)_{16}^{pk}$ se smatra nenegativnim, pa je njegova vrednost $(6FC)_{16} = (1788)_{10}$
- zapis $(0110)_{2}^{pk}$ se smatra nenegativnim, pa je njegova vrednost $(0110)_2 = (6)_{10}$
- zapis $(142)_{5}^{pk}$ se smatra nenegativnim, pa je njegova vrednost $(142)_5 = (47)_{10}$
- zapis $(2142)_{5}^{pk}$ se smatra nenegativnim (jer je prva cifra različita od $\lfloor B/2 \rfloor$ manja od te vrednosti), pa je njegova vrednost $(2142)_5 = (297)_{10}$
- zapis $(222)_{5}^{pk}$ se smatra nenegativnim, pa je njegova vrednost $(222)_5 = (62)_{10}$

Određivanje vrednosti predstavljene negativnim zapisom

- ako je zapis w negativan, tada se njegova vrednost u potpunom komplementu izračunava komplementiranjem zapisa w:
$$[w]_B^{pk} = [w]_B^{no} - K_{(B,n)}^{pk}$$
- ova razlika odgovara negaciji operacije potpunog komplementa broja: $-pk(w)$

Određivanje vrednosti predstavljene negativnim zapisom

Na primer:

- zapis $(73)_{10}^{pk}$ se smatra negativnim (jer $7 \geq 10/2$), pa je njegova vrednost $(73)_{10} - (100)_{10} = (-27)_{10}$
- zapis $(8712)_{16}^{pk}$ se smatra negativnim (jer $8 \geq 16/2$), pa je njegova vrednost $(8712)_{16} = (8712)_{16} - (10000)_{16} = (-78EE)_{16} = 30958_{10}$
- zapis $(10010)_{2}^{pk}$ se smatra negativnim, pa je njegova vrednost $(10010)_2 - (100000)_2 = (-01110)_2 = (-14)_{10}$
- zapis $(2421)_{5}^{pk}$ se smatra negativnim, pa je njegova vrednost $(2421)_5 - (10000)_5 = (-2024)_5 = (-264)_{10}$

Interval

- B parno

$$[-B^n/2, (B^n/2 - 1)]$$

- primetimo da kod parne osnove imamo interval asimetričan u odnosu na nulu, odnosno možemo predstaviti jednu negativnu vrednost više primeri:
  - $B = 10, n = 3, [-500, 499]$
  - $B = 2, n = 8, [-128, 127]$
- B neparno

$$[-\lfloor B^n/2 \rfloor, \lfloor B^n/2 \rfloor]$$

primer:

  - $B = 5, n = 3, [-222_5, 222_5] = [-62_{10}, 62_{10}]$

Proširivanje zapisa

- vrši se na isti način kao kod nepotpunog komplementa
- ako je zapis broja w nenegativan, potrebno je dopisati odgovarajući broj vodećih nula
  primeri:
  - $B = 10, n = 3$,zapis 345 se može proširiti na 5 cifara dodavanjem dve nule: 00345
  - $B = 2, n = 5$,zapis 01101 se može proširiti na 5 cifara dodavanjem tri nule: 00001101
- ako je zapis broja w negativan, potrebno je dopisati odgovarajući broj vodećih cifara $B - 1$
  primeri:
  - $B = 10, n = 3$,zapis 728 se može proširiti na 5 cifara dodavanjem dve cifre 9: 99728
  - $B = 16, n = 3$,zapis 921 se može proširiti na 6 cifara dodavanjem tri cifre F: $FFF921$
  - $B = 5, n = 3$,zapis 223 se može proširiti na 5 cifara dodavanjem dve cifre 4: 44223

Promena znaka

- promena znaka u zapisu w se obavlja kao operacija komplementacije nad zapisom w:

$$\langle -x\rangle_{B,n}^{pk} = pk(\langle -x\rangle_{B,n}^{pk})$$

- primeri:
  - ako je $B = 10$ i broj x predstavljen zapisom 5981, tada je $-x$ predstavljen zapisom 4019
  - ako je $B = 2$ i broj x predstavljen zapisom 01101101, tada je $-x$ predstavljen zapisom 10010011
  - ako je $B = 16$ i broj x predstavljen zapisom $D5EF4$, tada je $-x$ predstavljen zapisom $2A10C$
  - ako je $B = 5$ i broj x predstavljen zapisom 1243, tada je $-x$ predstavljen zapisom 3022
  - specijalno, ako je $B = 2$ i broj x predstavljen zapisom 10000000, tada se odgovarajući negativan broj ne može predstaviti sa istim brojem cifara jer se komplementiranjem dobija isti zapis

Promena znaka

- primetimo da kada saberemo neoznačeni zapis w broja x i neoznačeni zapis w' njemu suprotnog broja $-x$ dobijamo komplementacionu konstantu

Sabiranje

- Sabiranje brojeva x i y u potpunom komplementu u osnovu B sa n cifara čiji su zapisi redom $\langle x\rangle_{B,n}^{pk} = w_x$ i $\langle y\rangle_{B,n}^{pk} = w_y$ vrši se izračunavanjem izraza

$$([w_x]_N^{no} + [w_y]_N^{no}) mod K_{B,n}^{pk}$$

- ovaj izraz se izračunava tako što najpre izvršimo sabiranje neoznačenih brojeva pri čemu se eventualni prenos sa najviše pozicije (prekoračenje) ignoriše
- primeri:
  - $B = 10, 458 + 231 = 689$
  - $B = 10, 823 + 482 = 1305$, pošto dobijeni rezultat ima cifru više nego sabirci, početnu jedinicu brišemo i dobijamo 305
  - $B = 16, B43 + 621 = 1164$, pošto dobijeni rezultat ima cifru više nego sabirci, početnu jedinicu brišemo i dobijamo 164
  - $B = 2, 1001 + 0111 = 10000$, pošto dobijeni rezultat ima cifru više nego sabirci, početnu jedinicu brišemo i dobijamo 0000
  - $B = 5, 2311 + 1141 = 4002$

Oduzimanje

- Oduzimanje brojeva x i y u potpunom komplementu u osnovu B sa n cifara čiji su zapisi redom $\langle x\rangle_{B,n}^{pk} = w_x$ i $\langle y\rangle_{B,n}^{pk} = w_y$ vrši se izračunavanjem izraza

$$([w_x]_N^{no} - [w_y]_N^{no}) mod K_{B,n}^{pk}$$

- ovaj izraz se izračunava tako što najpre izvršimo oduzimanje neoznačenih brojeva i ako nije bilo pozajmice na mestu cifre najveće težine, dobijeni zapis predstavlja zapis razlike u potpunom komplementu, a ako jeste, tada se ova pozajmica ignoriše

Oduzimanje

- $B = 10, 237 - 491 = 746$ uz pozajmicu na mestu najveće težine koju ignorišemo
- $B = 16, 3EF - 52D = EC2$ uz pozajmicu na mestu najveće težine koju ignorišemo
- $B = 2, 1010 - 1100 = 1110$ uz pozajmicu na mestu najveće težine koju ignorišemo
- $B = 5, 3412 - 2101 = 1311$

Oduzimanje

- Oduzimanje se može realizovati i kao sabiranje sa suprotnom vrednošću
- primeri:
  - $B = 10, 237 - 491 = 237 + 509 = 746$
  - $B = 16, 3EF - 52D = 3EF + AD3 = EC2$
  - $B = 2, 1010 - 1100 = 1010 + 0100 = 1110$
  - $B = 5, 3412 - 2101 = 3412 + 2344 = 11311$, kada se dodatna jedinica ukloni sa najviše pozicije, dobija se 1311

Prekoračenje kod sabiranja i oduzimanja

- Do prekoračenja kod sabiranja i oduzimanja brojeva zapisanih sa n cifara u osnovi B dolazi kada dobijeni rezultat izlazi iz intervala $I_{B,n}^{pk}$
- Prekoračenje se manifestuje tako što je znak rezultata pogrešan
- Do prekoračenja kod sabiranja može doći kada se sabiraju dva broja istog znaka
- primeri:
  - $B = 10, 345 + 391 = 746$, dobijeni rezultat je negativan što znači da je došlo do prekoračenja
  - $B = 10, 931 + 512 = 443$, dobijeni rezultat je pozitivan što znači da je došlo do prekoračenja

Prekoračenje kod sabiranja i oduzimanja

- Do prekoračenja kod oduzimanja može doći kada se oduzimaju brojevi suprotnog znaka
- primeri:
  - $B = 10,231 - 512 = 719$, oduzimanjem pozitivnog i negativnog broja dobijen je negativan broj sto znači da je došlo do prekoračenja
  - ako bismo oduzimanje realizovali kao sabiranje sa suprotnom vrednošću, onda kod prekoračenja važe pravila za sabiranje: $B = 10,231 - 512 = 231 + 488 = 719$, dobijen je negativan broj kao zbir dva pozitivna što znači da je došlo do prekoračenja

Množenje i deljenje

- Množenje i deljenje u potpunom komplementu se izvode na isti način kao u nepotpunom komplementu
- Množenje i deljenje u potpunom komplementu se svode na množenje i deljenje apsolutnih vrednosti uz promenu znaka po potrebi
- Kao i ranije, znak ostatka je isti kao znak deljenika

Množenje - Butov algoritam

- pretpostavimo da množimo dva broja x i y, pri čemu je y oblika $\ldots 0111\ldots 1110\ldots$, sadrži $m-n$ susednih jedinica i to tako da je prva jedinica zdesna na poziciji n a druga na poziciji $m-1$

$$
\begin{aligned}
x \cdot y &= x \cdot (2^{m-1} + 2^{m-2} + \ldots + 2^{n}) \\
&= x \cdot \left(\sum_{i=0}^{m-1} 2^{i} - \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i} \right) \\
&= x \cdot (2^{m} - 2^{n})
\end{aligned}
$$

- umesto $m-n$ sabiranja (po jedno za svaku jedinicu iz y), imamo jedno oduzimanje $-x \cdot 2^{n}$ i jedno dodavanje $x \cdot 2^{m}$

Množenje - Butov algoritam

- Da li bi Butov algoritam bilo moguće primeniti i na neoznačene brojeve?
  - uvek se prvo vrši oduzimanje pa onda sabiranje
  - inicijalno se vrši oduzimanje od nule, što znači da je rezultat negativan broj
  - ova operacija nije moguća kod neoznačenih brojeva

Množenje - Butov algoritam I

- Koliku uštedu donosi Butov algoritam?
  - kod standardnog algoritma, najviše operacija donose množioci sa velikim brojem jedinica - ako je broj dužine n, jedinica može biti najviše n
  - kod Butovog algoritma, najviše operacija donose množioci kod kojih se nule i jedinice smenjuju (npr. $0101\ldots0101$) - ako je broj dužine n, prelaza može biti najviše $n-1$
  - posmatrajući najgore slučajeve, ušteda nije velika
  - ako posmatramo prosečan slučaj, matematičko očekivanje da će se na nekoj poziciji naći 0 ili 1 je 0.5 što znači da bi na osnovu toga kod standardnog algoritma imali $n/2$ operacija a kod Butovog $(n-1)/2$ operacija, što opet nije velika ušteda
  - u praksi je verovatnosni model drugačiji: u množenju najčešće učestvuju relativno mali brojevi (npr. u 32-bitnom tipu int možemo predstaviti brojeve između oko -2 milijarde i 2 milijarde, mada najčešće koristimo znatno manje)

Množenje - Butov algoritam II

- kod malih brojeva imamo ili veliki broj vodećih nula (pozitivni) ili veliki broj vodećih jedinica (negativni), ali svakako nećemo imati veliki broj prelaza
- zbog toga se Butov algoritam u praksi pokazuje efikasnijim

Množenje - Butov algoritam

- registri M, A, P dužine n i jednobitni P'
- inicijalno, M =prvi činilac (množenik), P =drugi činilac (množilac), $A = 0$, $P' = 0$
- ponavljamo n puta:
  - ako $P_0P' == 01$, onda $A = A + M$
  - ako $P_0P' == 10$, onda $A = A - M$
  - registri A, P, P' se aritmetički pomeraju udesno za jedno mesto

Deljenje

- registri M, A, P dužine n
- P_{n-i} - prefiks registra P dužine $n-i$ gde je i redni broj koraka
- inicijalno, M =delilac, AP =prošireni deljenik
- ponavljamo n puta:
  - AP pomeramo ulevo
  - ako $sgn(A) == sgn(M)$, onda $A = A - M$, inače $A = A + M$
  - ako $AP_{n-i} == 0$, onda $P_0 = 1$ i završavamo postupak
  - ako $sgn(A)$ nije promenjen, onda $P_0 = 1$, inače $P_0 = 0$ i vraćamo staru vrednost promenljive A
- AP pomeramo ulevo $n-i$ puta
- ako se znak deljenika i delioca razlikuje, $P = -P$
- na kraju je količnik u P a ostatak u A

Pk vs nk

- U odnosu na zapis nepotpuni komplement, zapis potpuni komplement otklanja i nedostatak u zapisu nule i omogućava jedinstveni zapis, pri čemu čuva jednostavnost izvođenja aritmetičkih operacija
- ovaj način zapisivanja se zbog toga koristi gotovo uvek za predstavljanje celih brojeva u računaru
- posebno je jednostavna varijanta potpunog komplementa u slučaju binarnog zapisa, između ostalog pošto dopušta značajno efikasniju implementaciju množenja

Slajdovi su napravljeni u odnosu na tekst *Označeni zapis celih brojeva* prof. Milana Bankovića koji se može preuzeti na stranici predmeta